11.1 – 11.3
Ορισμός – ιδιότητες – εγγραφή καν. πολυγώνων σε κύκλο

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.

2.
Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

3.
Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και περιγράφεται σε έναν άλλον. Οι δύο αυτοί κύκλοι είναι ομόκεντροι.

4.
Σχέσεις των στοιχείων καν. πολυγώνου :

i) $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$ **ii)** $P_\nu = \nu\,\lambda_\nu$

iii) $\omega_\nu = \dfrac{360^o}{\nu}$ **iv)** $E_\nu = \dfrac{1}{2}\,P_\nu\,\alpha_\nu$

5.
Για δύο κανονικά ν-γωνα ισχύει $\dfrac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \dfrac{R}{R'} = \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu}$

6.
$\lambda_4 = R\sqrt{2}$ και $\alpha_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

$\lambda_6 = R$ και $\alpha_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$\lambda_3 = R\sqrt{3}$ και $\alpha_3 = \dfrac{R}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

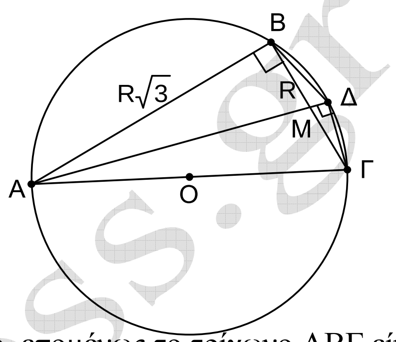
1.

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ ώστε $ΑΒ = λ_3$, και $ΒΓ= λ_6$. Αν η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον κύκλο στο Δ, τότε συναρτήσει του R, να βρείτε :

i) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΓ
ii) το μήκος του τμήματος ΜΔ
iii) το εμβαδόν του τριγώνου ΒΜΔ.

Προτεινόμενη λύση

i)



Επειδή $ΑΒ = λ_3$ και $ΒΓ = λ_6$, θα είναι

$ΑΒ = R\sqrt{3}$, $ΒΓ = R$, $\overset{\frown}{ΑΒ} = 120^o$, $\overset{\frown}{ΒΓ} = 60^o$

Οπότε $\overset{\frown}{ΑΒΓ} = 180^o$, επομένως η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος άρα

$(ΑΜΓ) = (ΑΒΜ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$ **(1)**

Όμως $Α\hat{Β}Γ = 90^o$ σαν εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Άρα $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΑΒ\cdot ΒΓ = \frac{1}{2}R\sqrt{3}\cdot R = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$

(1) $\Rightarrow$ $(ΑΜΓ) = \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

ii)

Θ. διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ : $ΑΜ^2 = \frac{2ΑΒ^2 + 2ΑΓ^2 - ΒΓ^2}{4}$

$$= \frac{2(R\sqrt{3})^2 + 2(2R)^2 - R^2}{4}$$

$$= \frac{6R^2 + 8R^2 - R^2}{4} = \frac{13R^2}{4}$$

Άρα $ΑΜ = \frac{R\sqrt{13}}{2}$

ΑΔ, ΒΓ τέμνουσες του κύκλου : $ΑΜ\cdot ΜΔ = ΒΜ\cdot ΜΓ \Leftrightarrow$

$$\frac{R\sqrt{13}}{2}\cdot ΜΔ = \frac{R}{2}\cdot\frac{R}{2} \Leftrightarrow$$

$$ΜΔ = \frac{R}{2\sqrt{13}}$$

iii)

$Β\hat{Μ}Δ = Α\hat{Μ}Γ \Rightarrow \frac{(ΒΜΔ)}{(ΑΜΓ)} = \frac{ΜΒ\cdot ΜΔ}{ΑΜ\cdot ΜΓ} = \frac{ΜΔ}{ΑΜ}$

$$\frac{(\mathrm{B M \Delta})}{\frac{\mathrm{R}^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{\mathrm{R}}{2\sqrt{13}}}{\frac{\mathrm{R}\sqrt{13}}{2}} \Leftrightarrow (\mathrm{B M \Delta}) = \frac{\mathrm{R}^2\sqrt{3}}{52}$$

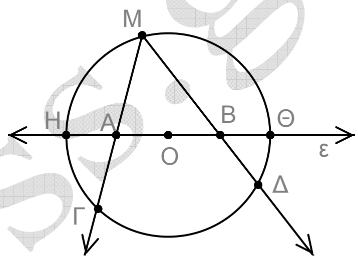
2.

Δίνεται κύκλος (O, R) και τυχαία ευθεία (ε) που διέρχεται από το κέντρο του. Εκατέρωθεν του κέντρου O και πάνω στην (ε) παίρνουμε σημεία A και B έτσι ώστε $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \alpha_3$. Αν M τυχαίο σημείο του κύκλου και οι ευθείες MA, MB τέμνουν τον κύκλο στα Γ, Δ αντίστοιχα, δείξτε ότι :

i) $\mathrm{MA} \cdot \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{MB} \cdot \mathrm{B\Delta}$

ii) $\dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{A\Gamma}} + \dfrac{\mathrm{MB}}{\mathrm{B\Delta}} = \dfrac{10}{3}$

Προτεινόμενη λύση



i)

Επειδή $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \alpha_3$, θα είναι $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \dfrac{\mathrm{R}}{2}$,

οπότε $\mathrm{AB} = \mathrm{R}$.

ΜΑΓ, ΗΑΘ τέμνουσες : $\mathrm{MA} \cdot \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AH}\cdot\mathrm{A\Theta}$

$$= (\mathrm{HO} - \mathrm{OA})(\mathrm{AO} + \mathrm{O\Theta})$$

$$= \left(\mathrm{R} - \frac{\mathrm{R}}{2}\right)\left(\mathrm{R} + \frac{\mathrm{R}}{2}\right) = \frac{3\mathrm{R}^2}{4} \quad \textbf{(1)}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι $\mathrm{MB} \cdot \mathrm{B\Delta} = \dfrac{3\mathrm{R}^2}{4}$ **(2)**

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε $\mathrm{MA} \cdot \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{MB} \cdot \mathrm{B\Delta}$

ii)

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{A\Gamma}} + \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{B\Delta}} = \frac{\mathrm{MA}^2}{\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{MA}} + \frac{\mathrm{MB}^2}{\mathrm{B\Delta}\cdot\mathrm{MB}}$$

$$\overset{(i)}{=} \frac{\mathrm{MA}^2}{\frac{3\mathrm{R}^2}{4}} + \frac{\mathrm{MB}^2}{\frac{3\mathrm{R}^2}{4}}$$

$$= \frac{4(\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2)}{3\mathrm{R}^2} \quad \textbf{(3)}$$

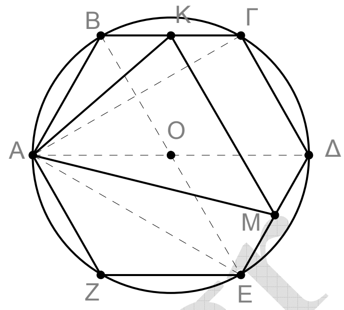
Θ. διαμέσων στο τρίγωνο MAB : $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = 2\mathrm{MO}^2 + \dfrac{\mathrm{AB}^2}{2}$

$$= 2\mathrm{R}^2 + \frac{\mathrm{R}^2}{2} = \frac{5\mathrm{R}^2}{2}$$

Η (3) γίνεται $\dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{A\Gamma}} + \dfrac{\mathrm{MB}}{\mathrm{B\Delta}} = \dfrac{4\cdot\frac{5\mathrm{R}^2}{2}}{3\mathrm{R}^2} = \dfrac{10}{3}$

3.
Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν Κ, Μ είναι τα μέσα των ΒΓ, ΔΕ αντίστοιχα, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΜΚ συναρτήσει του R

Προτεινόμενη λύση



Φέρουμε τις διαμέτρους ΑΔ, ΒΕ και τις διαγώνιες ΑΓ, ΑΕ.

$\widehat{ΒΓ} = \widehat{ΔΕ} \Rightarrow ΓΔ // ΒΕ \Rightarrow$ ΒΓΔΕ τραπέζιο.

ΚΜ διάμεσος του τραπεζίου $\Rightarrow$

$$ΚΜ = \frac{ΓΔ + ΒΕ}{2} = \frac{R + 2R}{2} = \frac{3R}{2}$$

ΑΚ διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ $\Rightarrow$

$$ΑΚ^2 = \frac{2ΑΒ^2 + 2ΑΓ^2 - ΒΓ^2}{4} = \frac{2R^2 + 2(R\sqrt{3})^2 - R^2}{4} = \frac{7R^2}{4}$$

Άρα $ΑΚ = \frac{R\sqrt{7}}{2}$

ΑΜ διάμεσος του τριγώνου ΑΕΔ $\Rightarrow$

$$ΑΜ^2 = \frac{2ΑΔ^2 + 2ΑΕ^2 - ΔΕ^2}{4} = \frac{2(2R)^2 + 2(R\sqrt{3})^2 - R^2}{4} = \frac{13R^2}{4}$$

Άρα $ΑΜ = \frac{R\sqrt{13}}{2}$

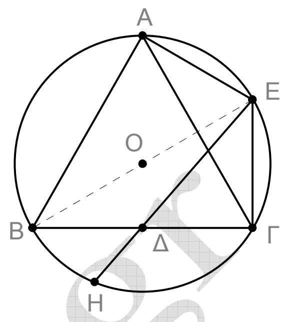
4.

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Έστω Δ το μέσο της ΒΓ και Ε το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΓ}$. Αν η ΕΔ τέμνει τον κύκλο στο Η,

i) να βρείτε το μήκος του ΔΗ συναρτήσει του R

ii) να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΓΒ

Προτεινόμενη λύση



i)

$ΒΓ = λ_3 = ΑΓ \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{ΒΓ} = 120^o = \overset{\frown}{ΑΓ} \quad \Rightarrow$

$\overset{\frown}{ΕΓ} = 60^o$

$\overset{\frown}{ΒΓΕ} = 180^o$

ΒΕ είναι διάμετρος του κύκλου

$Β\hat{Γ}Ε = 90^o$

Από πυθαγόρειο στο ΕΓΔ έχουμε $ΕΔ^2 = ΕΓ^2 + ΔΓ^2$

$$= λ_6^2 + \left(\frac{λ_3}{2}\right)^2$$

$$= R^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7R^2}{4}$$

Άρα $ΕΔ = \dfrac{R\sqrt{7}}{2}$

$$ΕΔ \cdot ΔΗ = ΒΔ \cdot ΔΓ \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R\sqrt{7}}{2} ΔΗ = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad ΔΗ = \frac{3R}{2\sqrt{7}}$$

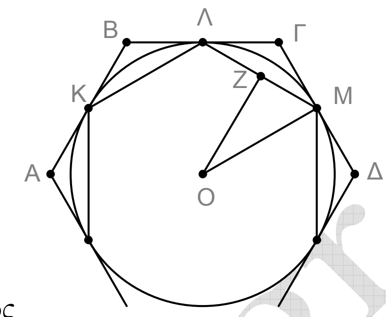
ii)

Επειδή η ΒΕ είναι διάμετρος και το Ε είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΓ}$, θα είναι $ΒΕ \perp ΑΓ$. Επομένως αφού το ΑΕΓΒ έχει κάθετες διαγώνιες, το εμβαδόν του θα είναι $Ε = \dfrac{ΒΕ \cdot ΑΓ}{2} = \dfrac{2R \cdot R\sqrt{3}}{2} = R^2\sqrt{3}$

5.

Το εμβαδόν ενός κανονικού ν-γώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R) είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κανονικού ν-γώνου στον ίδιο κύκλο. Να βρείτε το πλήθος των πλευρών καθενός πολυγώνου.

Προτεινόμενη λύση



Έστω ΑΒΓ . . . το περιγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο και ΚΛΜ . . . το εγγεγραμμένο.

Φέρουμε τα αποστήματα $ΟΖ = α_ν$

και $ΟΜ = α'_ν = R$.

Επειδή τα κανονικά πολύγωνα έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών, είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας $λ = \frac{ΟΜ}{ΟΖ} = \frac{α'_ν}{α_ν}$

και $\frac{E'}{E} = λ^2 \Leftrightarrow \frac{2E}{E} = \left(\frac{R}{α_ν}\right)^2 \Leftrightarrow 2 = \frac{R^2}{α_ν^2} \Leftrightarrow$

$$α_ν^2 = \frac{R^2}{2} \Leftrightarrow$$

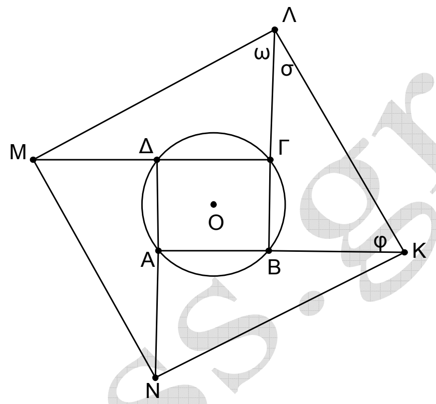
$$α_ν = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Οπότε $α_ν = α_4$, συνεπώς $ν = 4$

6.

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ενός τετραγώνου, που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R), θεωρούμε τμήματα ΒΚ= ΓΛ = ΔΜ = ΑΝ = λ_3, όπου λ_3 η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.
Δείξτε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο, του οποίου να υπολογίσετε την ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου συναρτήσει του R .

Προτεινόμενη λύση



Τα τέσσερα τρίγωνα ΜΛΓ, ΛΒΚ, ΚΑΝ, ΜΔΝ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια και οι κάθετες πλευρές τους είναι αφενός λ_3, αφετέρου $\lambda_3 + \lambda_4$.

Άρα ΜΛ = ΛΚ = ΚΝ = ΜΝ.

Οπότε το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος

Ακόμα $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ και επειδή $\hat{\varphi} + \hat{\sigma} = 90^o$,

θα είναι $\hat{\omega} + \hat{\sigma} = 90^o$ δηλαδή $\hat{\Lambda} = 90^o$

Οπότε το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΜΓΛ : $\text{ΜΛ}^2 = \text{ΜΓ}^2 + \text{ΛΓ}^2$

$$\text{ΜΛ}^2 = (\lambda_3 + \lambda_4)^2 + \lambda_3^2$$

$$= (R\sqrt{3} + R\sqrt{2})^2 + (R\sqrt{3})^2 =$$

$$= 8R^2 + 2R^2\sqrt{6}$$

Άρα $\text{ΜΛ} = R\sqrt{8+2\sqrt{6}}$

Έστω R΄ η ακτίνα του περιγεγραμμένου στο ΚΛΜΝ κύκλου.

Τότε $\text{ΜΛ} = R'\sqrt{2} \Leftrightarrow R\sqrt{8+2\sqrt{6}} = R'\sqrt{2} \Leftrightarrow R' = R\sqrt{4+\sqrt{6}}$

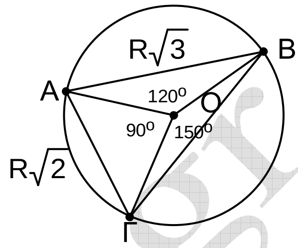
7.

Δύο χορδές ενός κύκλου (O, R) έχουν μήκη $AB = \lambda_3$ και $A\Gamma = \lambda_4$. Να βρείτε συναρτήσει του R την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
(2 περιπτώσεις)

Προτεινόμενη λύση

1η περίπτωση

Το κέντρο του κύκλου περιέχεται στην γωνία των χορδών



Αφού $AB = \lambda_3$ και $A\Gamma = \lambda_4$, θα είναι $A\hat{O}B = 120^o$ και $A\hat{O}\Gamma = 90^o$, οπότε $B\hat{O}\Gamma = 150^o$

Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΟΓ έχουμε

$$B\Gamma^2 = OB^2 + O\Gamma^2 - 2OB\cdot O\Gamma \text{συν}\, B\hat{O}\Gamma =$$
$$= R^2 + R^2 - 2R^2\text{συν}150^o$$
$$= 2R^2 - 2R^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 2R^2 + R^2\sqrt{3}, \quad \text{άρα} \quad B\Gamma = R\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

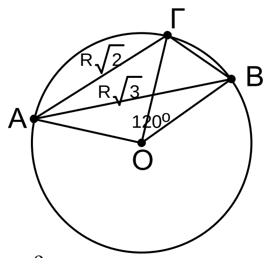
Περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ : $P = AB + B\Gamma + A\Gamma = R\sqrt{3} + R\sqrt{2+\sqrt{3}} + R\sqrt{2}$

Εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ : $(AB\Gamma) = (AOB) + (AO\Gamma) + (BO\Gamma) =$

$$= \frac{1}{2}R^2\,\text{ημ}120^o + \frac{1}{2}R^2\,\text{ημ}90^o + \frac{1}{2}R^2\,\text{ημ}150^o$$
$$= \frac{1}{2}R^2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R^2\frac{1}{2}$$
$$= \frac{3R^2 + R^2\sqrt{3}}{4}$$

2η περίπτωση

Το κέντρο του κύκλου είναι έξω από την γωνία των χορδών



$A\hat{O}B = 120^o$ και $A\hat{O}\Gamma = 90^o$, άρα $B\hat{O}\Gamma = 30^o$

Οπότε ομοίως βρίσκουμε ότι $B\Gamma = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Επομένως $P = R\sqrt{3} + R\sqrt{2-\sqrt{3}} + R\sqrt{2}$

$$(AB\Gamma) = (AO\Gamma) + (BO\Gamma) - (AOB)$$
$$= \frac{1}{2}RR\,\text{ημ}90^o + \frac{1}{2}RR\,\text{ημ}30^o - \frac{1}{2}RR\,\text{ημ}120^o$$
$$= \frac{1}{2}R^2\cdot 1 + \frac{1}{2}R^2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}R^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{3R^2 - R^2\sqrt{3}}{4}$$

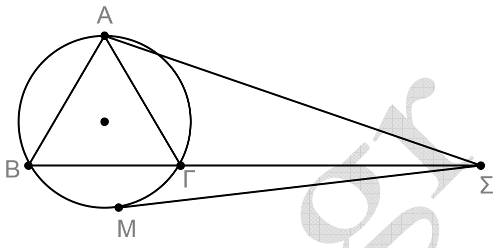
8.

Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Στην προέκταση της ΒΓ παίρνουμε τμήμα ΒΣ = 3ΑΒ και από το Σ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΣΜ.

i) Δείξτε ότι $ΣΜ = 3λ_4$.

ii) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΣΑΓ συναρτήσει του R.

Προτεινόμενη λύση



i) $AB = λ_3 = R\sqrt{3}$ και $ΣΒ = 3ΑΒ = 3R\sqrt{3}$

$ΣΜ^2 = ΣΒ \cdot ΣΓ = (3R\sqrt{3})\,2(R\sqrt{3}) = 18R^2$

Άρα $ΣΜ = 3R\sqrt{2} = 3λ_4$

ii)

$$(ΑΣΓ) = \frac{1}{2} ΑΓ \cdot ΓΣ \; ημ\hat{Γ}_{εξ.} =$$

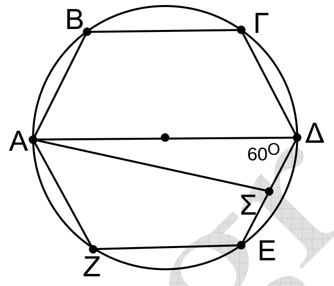
$$= \frac{1}{2}(R\sqrt{3})(2R\sqrt{3})\,ημ120^o =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

9.

Αν Σ είναι το μέσο της πλευράς ΕΔ ενός κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R), να βρείτε το εμβαδόν κάθε ενός από τα μέρη στα οποία χωρίζεται το εξάγωνο από την ΑΣ, συναρτήσει του R.

Προτεινόμενη λύση



$(ΑΔΣ) = \frac{1}{2}ΑΔ\cdot ΔΣ\,ημ60^o =$

$= \frac{1}{2}2R\,\frac{R}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ οπότε

$(ΑΖΕΣ) = (ΑΖΕΔ) - (ΑΔΣ)$

$= \frac{1}{2}(ΑΒΓΔΕΖ) - (ΑΔΣ)$

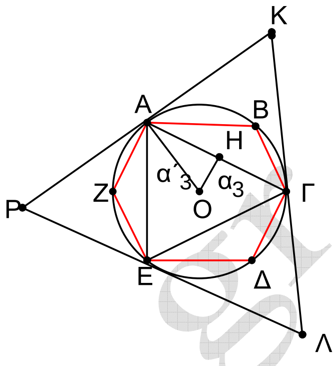
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6λ_6\cdot α_6 - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\cdot 3R\frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$

Οπότε $(ΑΒΓΔΣ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓΔΕΖ) + (ΑΔΣ) = R^2\sqrt{3}$

10.

Αν E_3 είναι το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο, E'_3 είναι το εμβαδόν του περιγεγραμμένου ισοπλεύρου τριγώνου στον ίδιο κύκλο και E_6 είναι το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου του εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο, δείξτε ότι $E'_3 = 4E_3$ και $E_6^2 = E_3 \cdot E'_3$

Προτεινόμενη λύση



Έστω ΑΓΕ το εγγεγραμμένο στον κύκλο ισόπλευρο τρίγωνο, ΚΛΡ το περιγεγραμμένο και ΑΒΓΔΕΖ το εγγεγραμμένο κανονικό εξάγωνο.

Τα ΑΕΓ, ΚΛΡ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας

$$\lambda = \frac{\alpha_3}{\alpha'_3} = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}, \quad \text{οπότε} \quad \frac{E_3}{E'_3} = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad E'_3 = 4E_3$$

Είναι $$E_6 = \frac{1}{2} 6 \cdot \lambda_6 \cdot \alpha_6 = 3R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

$$E_3 = \frac{1}{2} 3 \cdot \lambda_3 \cdot \alpha_3 = \frac{1}{2}\, 3R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

Άρα $$E'_3 = 4 \cdot E = 4 \cdot \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = 3R^2\sqrt{3}$$

Επομένως $$E_3 \cdot E'_3 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3R^2\sqrt{3} = \frac{27R^4}{4} \qquad \textbf{(1)}$$

και $$E_6^2 = \left(\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{27R^4}{4} \qquad \textbf{(2)}$$

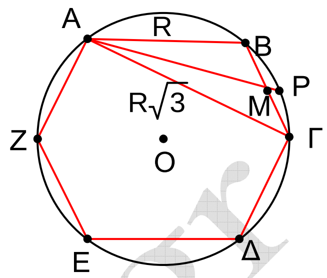
Από τις (1) και (2) έχουμε $E_6^2 = E_3 \cdot E'_3$

11.

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ και η ΑΜ τέμνει τον κύκλο στο Ρ, δείξτε ότι ΑΜ = 7ΜΡ .

Προτεινόμενη λύση

Γνωρίζουμε ότι ΑΜ· ΜΡ = ΒΜ ·ΜΓ **(1)**



Η ΑΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε

$$AM^2 = \frac{2AB^2 + 2A\Gamma^2 - B\Gamma^2}{4}$$

$$= \frac{2R^2 + 2(R\sqrt{3})^2 - R^2}{4}$$

$$= \frac{7R^2}{4} \quad \text{άρα} \quad AM = \frac{R\sqrt{7}}{2}$$

Η (1) δίνει $\frac{R\sqrt{7}}{2} \cdot MP = \frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2} \Leftrightarrow MP = \frac{R\sqrt{7}}{14}$

Συνεπώς $7MP = 7 \cdot \frac{R\sqrt{7}}{14} = \frac{R\sqrt{7}}{2} = AM$

12.

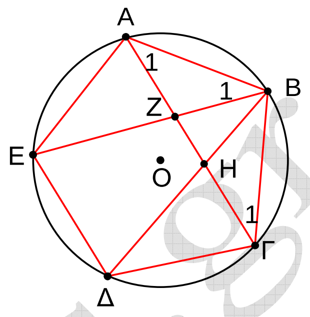
Έστω κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ με $\lambda_5 = \alpha$. Η ΑΓ τέμνει τις ΒΕ και ΒΔ στα Ζ και Η αντίστοιχα. Δείξτε ότι

i) Το ΕΖΓΔ είναι ρόμβος

ii) $AZ = H\Gamma = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1)$

iii) $ZH = \frac{\alpha}{2}(3-\sqrt{5})$

iv) $A\Gamma = \frac{\alpha}{2}(1+\sqrt{5})$



Προτεινόμενη λύση

i)

$\overset{\frown}{EA} = \overset{\frown}{\Delta\Gamma} \Rightarrow$ ΕΔ//ΑΓ και ομοίως ΕΒ//ΔΓ

Άρα το ΕΖΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Και επειδή $E\Delta = \Delta\Gamma = \lambda_5 = \alpha$, αυτό είναι ρόμβος

ii)

Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΒΓ είναι όμοια, αφού $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ σαν εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα. Άρα $\frac{AZ}{AB} = \frac{AB}{A\Gamma}$

$$\frac{AZ}{\alpha} = \frac{\alpha}{AZ + Z\Gamma}$$

$$\frac{AZ}{\alpha} = \frac{\alpha}{AZ + \alpha}$$

$$AZ^2 + \alpha\, AZ - \alpha^2 = 0$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή βρίσκουμε ότι $AZ = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1)$ προφανώς $AZ = H\Gamma$

iii)

$$ZH = Z\Gamma - H\Gamma = \alpha - \frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{\alpha}{2}(3-\sqrt{5})$$

iv)

$$A\Gamma = AZ + Z\Gamma = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1) + \alpha = \frac{\alpha}{2}(1+\sqrt{5})$$

13.

Η διαφορά των εμβαδών ενός κανονικού εξαγώνου και ενός τετραγώνου που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο (O, R) είναι 5,5 cm^2 .

i) Να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου.

ii) Ποιος είναι ο λόγος των εμβαδών των δύο κανονικών πολυγώνων ;

Προτεινόμενη λύση

i)

Το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου είναι $E_6 = \frac{1}{2}6\cdot\lambda_6\cdot\alpha_6 = 3R\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Και του τετραγώνου $E_4 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2$

Οπότε $E_6 - E_4 = 5,5 \Leftrightarrow \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} - 2R^2 = 5,5 \Leftrightarrow$

$$R = \sqrt{4+3\sqrt{3}}$$

ii)

$$\frac{E_6}{E_4} = \frac{\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}}{2R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

14.

Έστω ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ και ακτίνας R. Χορδή ΑΒ αυτού ισούται με λ_6. Αν $ΑΔ \perp ΒΓ$ και Μ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΓ}$, η δε ΒΜ τέμνει τις ΑΔ, ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα,

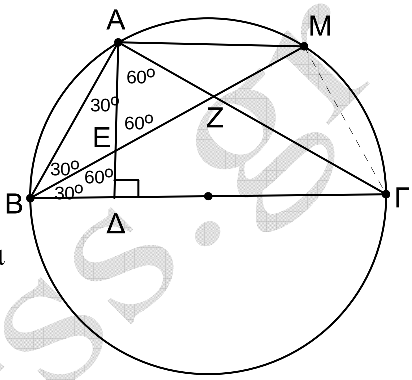
i) να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΜ συναρτήσει του R

ii) να δείξτε ότι $ΒΕ \cdot ΒΜ = R^2$ και ότι $ΒΕ = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$

iii) να δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο, του οποίου να βρείτε το εμβαδόν συναρτήσει του R

iv) να δείξτε ότι $(ΑΒΕ) = 2(ΒΕΔ)$

Προτεινόμενη λύση



i)

Αφού $ΑΒ = \lambda_6$ και Μ μέσο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΓ}$,

θα είναι $\overset{\frown}{ΒΑ} = \overset{\frown}{ΑΜ} = \overset{\frown}{ΜΓ} = 60^o$.

Άρα $ΑΜ = \lambda_6 = R$ και $ΒΜ = \lambda_3 = R\sqrt{3}$

Επομένως η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΜ θα είναι

$Ρ = ΑΒ + ΑΜ + ΒΜ = R + R + R\sqrt{3} = 2R + R\sqrt{3}$

ii)

Είναι $Β\hat{Μ}Γ = Β\hat{Α}Γ = 90^o$ σαν εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο.

Στο τετράπλευρο ΕΔΓΜ έχουμε $\hat{Δ} + \hat{Μ} = 180^o$, επομένως είναι εγγράψιμο,

άρα $ΒΕ \cdot ΒΜ = ΒΔ \cdot ΒΓ$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ$

Συνεπώς $ΒΕ \cdot ΒΜ = ΑΒ^2 = R^2$.

Ακόμα

$$ΒΕ \cdot ΒΜ = R^2 \iff ΒΕ \cdot R\sqrt{3} = R^2 \iff ΒΕ = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

iii)

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΕΒΔ και ΑΒΖ είναι $Ε\hat{Β}Δ = 30^o = Α\hat{Β}Ζ$.

Οπότε οι γωνίες του τριγώνου ΑΕΖ είναι 60^o η κάθε μία, άρα είναι ισόπλευρο,

με πλευρά $ΑΕ = ΒΕ = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$ και εμβαδόν $Ε = \dfrac{ΑΕ^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{12}$

iv)

$$\frac{(ΑΒΕ)}{(ΒΕΔ)} = \frac{\frac{1}{2}ΑΕ \cdot ΒΔ}{\frac{1}{2}ΕΔ \cdot ΒΔ} = \frac{ΑΕ}{ΕΔ} \qquad \textbf{(1)}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΔ είναι $Ε\hat{Β}Δ = 30^o$, άρα $ΕΔ = \dfrac{ΒΕ}{2} = \dfrac{ΑΕ}{2}$

Η (1) γίνεται $\dfrac{(ΑΒΕ)}{(ΒΕΔ)} = \dfrac{ΑΕ}{\frac{ΑΕ}{2}} = 2 \iff (ΑΒΕ) = 2(ΒΕΔ)$